1.6.3. Управляемост и наблюдаемост на линейни стационарни системи

Управляемостта е основно свойство на една система за управление, което определя възможността за синтез на управление по зададен критерий за системата. Оценката за управляемост на системата се извършва от представянето на системата в пространството на състоянието.

Определение 1.6.1. *Една система е напълно управляема, ако може да се приведе от произволно начално състояние* $x(t_0)$ *към произволно състояние* $x(t_1)$ *за краен интервал от време* $T = t_1 - t_0$ *с помощта на управляващия вектор* $\mathbf{u}(t)$.

Наблюдаемостта е свързана с възможността за оценка на вектора на състоянието на една система на базата на входния и изходния й сигнали. Тази задача е много важна в практиката, тъй като обикновено за синтез на управление на система е необходим достъп до всички нейни променливи на състоянието. В повечето случаи обаче някои от тези променливи са недостъпни за измерване, а доста често за измерване е достъпен единствено изходния сигнал на системата.

Определение 1.6.2. *Една система е напълно наблюдаема, ако всяко нейно състояние* $x(t_0)$ *може да се определи само по наблюдението на изходната й величина* $y(t)$ *за краен интервал от време* $t_0 < t < t_1$.

Анализът за управляемост на системи се извършва от уравнението на състоянието от представянето на системата в пространството на състоянието:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), \tag{1.165}$$

От матриците на състоянието **A** и на входа **B** се формира следната съставна матрица:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{AB} & \mathbf{A}^2\mathbf{B} & \cdots & \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B} \end{bmatrix}. \tag{1.166}$$

При системи с един вход матрицата **Q** има размерност, съвпадаща с размерността на матрицата на системата **A**, т.е. тя е квадратна матрица с размерност $n \times n$.

Условието за управляемост е:

$$rank(\mathbf{Q}) = n, \tag{1.167}$$

т.е. матрицата **Q** трябва да е с ранг, съвпадащ с размерността на системата.

Ако рангът на матрицата **Q** е по-малък от n системата е непълно управляема.

Анализът за наблюдаемост на системи се извършва от уравнението на състоянието (1.165) и от уравнението на изхода:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t), \qquad (1.168)$$

от представянето на системата в пространството на състоянието.

От матриците на състоянието **A** и на изхода **C** се формира следната съставна матрица:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \mathbf{CA}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{n-1} \end{bmatrix}. \qquad (1.169)$$

При системи с един изход матрицата **S** има размерност, съвпадаща с размерността на матрицата на системата **A**, т.е. тя е квадратна матрица с размерност $n \times n$.

Условието за наблюдаемост е:

$$rank(\mathbf{S}) = n, \qquad (1.170)$$

т.е. матрицата **S** трябва да е с ранг, съвпадащ с размерността на системата.

Ако рангът на матрицата **S** е по-малък от n системата е непълно наблюдаема.

Възможно е матрицата **S** да бъде записана във вида:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}^T & \mathbf{A}^T\mathbf{C}^T & \left(\mathbf{A}^T\right)^2\mathbf{C}^T & \cdots & \left(\mathbf{A}^T\right)^{n-1}\mathbf{C}^T \end{bmatrix}. \qquad (1.171)$$

Условието за наблюдаемост при този запис на матрицата **S** остава същото.

Пример 1.22. Система се описва с диференциалното уравнение:

$$\ddot{y}(t) + 4\dot{y}(t) + 3y(t) = \dot{u}(t) + 3u(t).$$

Да се изследва управляемостта и наблюдаемостта на системата от представянето й в пространството на състоянието във фазово-координатна канонична форма - вариант А.

Решение. Системата е от втори ред, коефициентите a_i и b_j са:

$$a_0 = 1,\ a_1 = 4,\ a_2 = 3,\ b_0 = 0,\ b_1 = 1,\ b_2 = 3.$$

Коефициентите β_i, които са елементи на матрицата на входа **B** при прилагане на ФККФ - вариант А, са:

$$\beta_0 = b_0 = 0,$$

$$\beta_1 = b_1 - a_1\beta_0 = 1,$$

$$\beta_2 = b_2 - a_1\beta_1 - a_2\beta_0 = 3 - 4 = -1.$$

Матриците **A**, **B**, **C** и **D** на системата във ФККФ са:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{D} = [0].$$

За система от втори ред матрицата **Q** има вида:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{AB} \end{bmatrix}$$

и за конкретните матрици **A** и **B** е:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Детерминантата на получената матрица **Q** е равна на нула, следователно:

$$rank(\mathbf{Q}) = 1.$$

Тъй като системата е от втори ред, а рангът на матрицата **Q** е по-малък от 2, системата не е управляема от представянето й във ФККФ - вариант А. Това обаче не означава, че системата няма да е управляема от друго нейно представяне в пространството на състоянието.

Нека разглежданата система бъде представена в пространството на състоянието в нормална канонична форма. Корените на характеристичното уравнение на системата:

$$p^2 + 4p + 3 = 0$$

са:

$$p_1 = -1,\ p_2 = -3.$$

Матриците **A** и **B** на системата в НКФ са:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Матрицата **Q** е:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{AB} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}.$$

Детерминантата на получената матрица **Q** е равна на -2, следователно:

$$rank(\mathbf{Q}) = 2,$$

откъдето следва, че системата е управляема от представянето й в НКФ.

За система от втори ред матрицата **S** има вида:

$$\mathbf{S}=\begin{bmatrix}\mathbf{C}\\ \mathbf{CA}\end{bmatrix}$$

и за конкретните матрици **A** и **C** от представянето на системата във ФККФ-вариант А тя е:

$$\mathbf{S}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\ .$$

Детерминантата на получената матрица **S** е равна на единица и тъй като е различна от нула, то:

$$rank(\mathbf{Q})=2\,.$$

Тъй като рангът на матрицата **S** съвпада с размерността на системата, следва, че системата е наблюдаема от представянето й в пространството на състоянието във ФККФ - вариант А.

Пример 1.23. Система се описва с диференциалното уравнение:

$$\dddot{y}(t)+5\ddot{y}(t)+10\dot{y}(t)+15y(t)=2u(t)\,.$$

Да се изследва управляемостта и наблюдаемостта на системата от представянето й в пространството на състоянието във фазово-координатна канонична форма.

Решение. Системата е от трети ред и диференциалното й уравнение е без производна в дясната част, следователно матриците на системата в пространството на състоянието във ФККФ ще се получат при прилагане на шаблона (1.88):

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -15 & -10 & -5\end{bmatrix},\quad \mathbf{B}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 2\end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix},\qquad \mathbf{D}=\begin{bmatrix}0\end{bmatrix}.$$

За система от трети ред матрицата **Q** има вида:

$$\mathbf{Q}=\begin{bmatrix}\mathbf{B} & \mathbf{AB} & \mathbf{A}^2\mathbf{B}\end{bmatrix}$$

и за конкретните матрици **A** и **B** е:

$$\mathbf{Q}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 2\\ 0 & 2 & -10\\ 2 & -10 & 30\end{bmatrix}\ .$$

Детерминантата на получената матрица **Q** е равна на -8, следователно:

$$rank(\mathbf{Q})=3\,,$$

откъдето следва, че системата е управляема от нейното представяне в пространството на състоянието във фазово-координатната канонична форма.

За система от трети ред матрицата **S** има вида:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \mathbf{CA}^2 \end{bmatrix}$$

и за конкретните матрици **A** и **C** от представянето на системата във ФККФ тя е:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

Детерминантата на получената матрица **S** е равна на единица и тъй като е различна от нула, то:

$$rank(\mathbf{Q}) = 3 .$$

Тъй като рангът на матрицата **S** съвпада с размерността на системата, следва, че системата е наблюдаема от представянето ѝ в пространството на състоянието във ФККФ.