1.6.2. Метод за определяне на преходната матрица

Съществуват няколко метода за определяне на преходната матрица. Ще бъде разгледан един от тях, наречен метод на Силвестър. При този метод преходната матрица се пресмята по израза:

$$\Phi(t) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i e^{p_i t}\,, \tag{1.163}$$

където с p_i са означени собствените стойности на матрицата на системата **A**, n е реда на системата, а $\mathbf{F}_i$ са матрици, които се определят по формулата:

$$\mathbf{F}_i = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{\mathbf{A} - p_j \mathbf{I}}{p_i - p_j}, \tag{1.164}$$

където **I** е единична матрица от n-ти ред.

Пример 1.20. Да се определи преходната матрица на система, чиято матрица **A** от представянето на системата в пространството на състоянието е:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -12 & -7 \end{bmatrix}.$$

Решение. Собствените стойности на матрицата **A** са:

$$p_1 = -3,\ p_2 = -4.$$

От матрицата **A** се вижда, че редът на системата е $n = 2$. За система от втори ред формулата за определяне на преходната матрица по метода на Силвестър е:

$$\Phi(t) = \mathbf{F}_1 e^{p_1 t} + \mathbf{F}_2 e^{p_2 t}.$$

За система от втори ред по формула (1.164) се получават следните изрази за матриците $\mathbf{F}_i$:

$$\mathbf{F}_1 = \frac{\mathbf{A} - p_2 \mathbf{I}}{p_1 - p_2},$$

$$\mathbf{F}_2 = \frac{\mathbf{A} - p_1 \mathbf{I}}{p_2 - p_1}.$$

За конкретната система за матриците $\mathbf{F}_i$ се получава:

$$\mathbf{F}_1 = \frac{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -12 & -7 \end{bmatrix} - (-4)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}{-3-(-4)} = \frac{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -12 & -7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}}{1} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -12 & -3 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{F}_2 = \frac{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -12 & -7 \end{bmatrix} - (-3)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}{-4-(-3)} = \frac{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -12 & -7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}}{-1} = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 12 & 4 \end{bmatrix}.$$

Следователно преходната матрица на системата е:

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -12 & -3 \end{bmatrix} e^{-3t} + \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 12 & 4 \end{bmatrix} e^{-4t},$$

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} 4e^{-3t} & e^{-3t} \\ -12e^{-3t} & -3e^{-3t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3e^{-4t} & -e^{-4t} \\ 12e^{-4t} & 4e^{-4t} \end{bmatrix} e^{-4t},$$

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} 4e^{-3t} - 3e^{-4t} & e^{-3t} - e^{-4t} \\ -12e^{-3t} + 12e^{-4t} & -3e^{-3t} + 4e^{-4t} \end{bmatrix}.$$

Пример 1.21. Система се описва с диференциалното уравнение:

$$2\dddot{y}(t) + 16\ddot{y}(t) + 34\dot{y}(t) + 20y(t) = 7u(t).$$

Да се намери преходната матрица на системата от представянето й във фазово-координатната канонична форма.

Решение. Коефициентът $a_0 = 2 \neq 1$ следователно уравнението първо трябва да се нормализира, като се раздели на 2:

$$\dddot{y}(t) + 8\ddot{y}(t) + 17\dot{y}(t) + 10y(t) = 3.5u(t).$$

Тъй като в дясната част на уравнението на системата няма производна на входния сигнал, определянето на матриците й във ФККФ може да стане по шаблонните матрици (1.88):

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -10 & -17 & -8 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3.5 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{D} = [0].$$

Собствените стойности на матрицата **A** са:

$$p_1 = -1,\ p_2 = -2,\ p_3 = -5\,.$$

Редът на системата е $n = 3$. За система от трети ред формулата за определяне на преходната матрица по метода на Силвестър е:

$$\Phi(t) = \mathbf{F}_1 e^{p_1 t} + \mathbf{F}_2 e^{p_2 t} + \mathbf{F}_3 e^{p_3 t}\,.$$

За система от трети ред по формула (1.164) се получават следните изрази за матриците $\mathbf{F}_i$:

$$\mathbf{F}_1 = \frac{\mathbf{A} - p_2\mathbf{I}}{p_1 - p_2} . \frac{\mathbf{A} - p_3\mathbf{I}}{p_1 - p_3},$$

$$\mathbf{F}_2 = \frac{\mathbf{A} - p_1\mathbf{I}}{p_2 - p_1} . \frac{\mathbf{A} - p_3\mathbf{I}}{p_2 - p_3},$$

$$\mathbf{F}_3 = \frac{\mathbf{A} - p_1\mathbf{I}}{p_3 - p_1} . \frac{\mathbf{A} - p_2\mathbf{I}}{p_3 - p_2} .$$

За конкретната система за матриците $\mathbf{F}_i$ се получава:

$$\mathbf{F}_1 = \frac{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -10 & -17 & -8 \end{bmatrix} - (-2)\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}{-1-(-2)} . \frac{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -10 & -17 & -8 \end{bmatrix} - (-5)\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}{-1-(-5)} =$$

$$= \frac{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -10 & -17 & -8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}}{1} . \frac{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -10 & -17 & -8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}}{4} =$$

$$= \frac{\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -10 & -17 & -6 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ -10 & -17 & -3 \end{bmatrix}}{4} = \frac{\begin{bmatrix} 10 & 7 & 1 \\ -10 & -7 & -1 \\ 10 & 7 & 1 \end{bmatrix}}{4} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2.5 & 1.75 & 0.25 \\ -2.5 & -1.75 & -0.25 \\ 2.5 & 1.75 & 0.25 \end{bmatrix} .$$

$$\mathbf{F}_2 = \frac{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -10 & -17 & -8 \end{bmatrix} - (-1)\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}{-2-(-1)} . \frac{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -10 & -17 & -8 \end{bmatrix} - (-5)\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}{-2-(-5)} =$$

$$= \begin{bmatrix} -1.67 & -2 & -0.33 \\ 3.33 & 4 & 0.67 \\ -6.67 & -8 & -1.33 \end{bmatrix} .$$

$$\mathbf{F}_3 = \frac{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -10 & -17 & -8 \end{bmatrix} - (-1)\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}{-5-(-1)} . \frac{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -10 & -17 & -8 \end{bmatrix} - (-2)\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}{-5-(-2)} =$$

$$=\begin{bmatrix} 0.17 & 0.25 & 0.08 \\ -0.83 & -1.25 & -0.42 \\ 4.17 & 6.25 & 2.08 \end{bmatrix}.$$

Преходната матрица на системата е:

$$\Phi(t)=\begin{bmatrix} 2.5 & 1.75 & 0.25 \\ -2.5 & -1.75 & -0.25 \\ 2.5 & 1.75 & 0.25 \end{bmatrix}e^{-t}+\begin{bmatrix} -1.67 & -2 & -0.33 \\ 3.33 & 4 & 0.67 \\ -6.67 & -8 & -1.33 \end{bmatrix}e^{-2t}+$$
$$+\begin{bmatrix} 0.17 & 0.25 & 0.08 \\ -0.83 & -1.25 & -0.42 \\ 4.17 & 6.25 & 2.08 \end{bmatrix}e^{-5t},$$

$$\Phi(t)=\begin{bmatrix} 2.5e^{-t}-1.67e^{-2t}+0.17e^{-5t} & 1.75e^{-t}-2e^{-2t}+0.25e^{-5t} & 0.25e^{-t}-0.33e^{-2t}+0.08e^{-5t} \\ -2.5e^{-t}+3.33e^{-2t}-0.83e^{-5t} & -1.75e^{-t}+4e^{-2t}-1.25e^{-5t} & -0.25e^{-t}+0.67e^{-2t}-0.42e^{-5t} \\ 2.5e^{-t}-6.67e^{-2t}+4.17e^{-5t} & 1.75e^{-t}-8e^{-2t}+6.25e^{-5t} & 0.25e^{-t}-1.33e^{-2t}+2.08e^{-5t} \end{bmatrix}.$$