

1.6.1. Формула на Коши. Преходна матрица.

Уравненията на състоянието и на наблюдението на линейна стационарна система са:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), \quad (1.148)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t), \quad (1.149)$$

Анализът на динамиката на системата може да се извърши чрез решаване на диференциалното уравнение на състоянието (1.148). Уравнението се решава по следния начин - първоначално то се преобразува във вида:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{A}\mathbf{x}(t) = \mathbf{B}\mathbf{u}(t). \quad (1.150)$$

Лявата и дясната част на така преобразуваното уравнение на състоянието се умножават по $e^{-\mathbf{A}t}$:

$$e^{-\mathbf{A}t}(\dot{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{A}\mathbf{x}(t)) = e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{B}\mathbf{u}(t). \quad (1.151)$$

Вижда се, че лявата част на уравнение (1.151) е всъщност производната на изрази $e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{x}(t)$:

$$\frac{d}{dt}(e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{x}(t)) = -\mathbf{A}e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{x}(t) + e^{-\mathbf{A}t}\dot{\mathbf{x}}(t) = e^{-\mathbf{A}t}(\dot{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{A}\mathbf{x}(t)). \quad (1.152)$$

Тогава уравнение (1.151) може да се запише във вида:

$$\frac{d}{dt}(e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{x}(t)) = e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{B}\mathbf{u}(t). \quad (1.153)$$

Полученото уравнение (1.153) се интегрира в границите от t_0 до t :

$$\int_{t_0}^t \frac{d}{d\tau}(e^{-\mathbf{A}\tau}\mathbf{x}(\tau))d\tau = \int_{t_0}^t e^{-\mathbf{A}\tau}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau. \quad (1.154)$$

Лявата част на (1.154) може да се запише във вида:

$$e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{x}(t) - e^{-\mathbf{A}t_0}\mathbf{x}(t_0) = \int_{t_0}^t e^{-\mathbf{A}\tau}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau, \quad (1.155)$$

$$e^{-\mathbf{A}t} \mathbf{x}(t) = e^{-\mathbf{A}t_0} \mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^t e^{-\mathbf{A}\tau} \mathbf{B} \mathbf{u}(\tau) d\tau, \quad (1.156)$$

Двете страни на уравнение (1.155) се умножават отляво по матрицата $e^{\mathbf{A}t}$:

$$e^{\mathbf{A}t} e^{-\mathbf{A}t} \mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t} e^{-\mathbf{A}t_0} \mathbf{x}(t_0) + e^{\mathbf{A}t} \int_{t_0}^t e^{-\mathbf{A}\tau} \mathbf{B} \mathbf{u}(\tau) d\tau, \quad (1.157)$$

или за решението на уравнението на състоянието $\mathbf{x}(t)$ се получава:

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}(t-t_0)} \mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{B} \mathbf{u}(\tau) d\tau. \quad (1.158)$$

Матрицата $e^{\mathbf{A}(t-t_0)}$ в решението на уравнението на състоянието се нарича *преходна матрица*. Прието е переходната матрица да се означава още като:

$$e^{\mathbf{A}(t-t_0)} = \Phi(t-t_0). \quad (1.159)$$

Ако входният сигнал на системата $\mathbf{u}(t)$ е равен на нула, уравнението на състоянието (1.148) става хомогенно:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \mathbf{x}(t). \quad (1.160)$$

Решението на хомогенното диференциално уравнение на състоянието се получава, като в решението на нехомогенното уравнение (1.158) се замести $\mathbf{u}(t)$ с нула:

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}(t-t_0)} \mathbf{x}(t_0) = \Phi(t-t_0) \mathbf{x}(t_0). \quad (1.161)$$

Следователно може да се даде следното определение за переходна матрица: *преходна матрица е такава матрица, която умножена по началните условия на системата $\mathbf{x}(t_0)$ дава решението на хомогенното уравнение на състоянието на системата.*

Уравнението на изхода (1.149) на системата, изразено чрез переходната матрица и израза за $\mathbf{x}(t)$ (1.158) е:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\Phi(t - t_0)\mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^t \mathbf{C}\Phi(t - \tau)\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau + \mathbf{D}\mathbf{u}(t). \quad (1.162)$$

Обикновено се приема, че началният момент $t_0 = 0$. При това допускане преходната матрица се означава само като $e^{\mathbf{A}t}$ или $\Phi(t)$.