1.4.3.2. Случай, при който предавателната функция на системата съдържа нули

В общия случай предавателната функция на системата съдържа нули, т.е. числителят й е от първи или по-висок ред

$$W(p)=\frac{y(p)}{u(p)}=\frac{b_0p^m+b_1p^{m-1}+...+b_{m-1}p+b_m}{p^n+a_1p^{n-1}+...+a_{n-1}p+a_n}, \qquad (1.135)$$

където $m \le n$.

Предавателната функция на системата може да се представи в разложения вид:

$$W(p)=\frac{y(p)}{u(p)}=b_0\prod_{i=1}^{m}\frac{p-s_i}{p-p_i}\prod_{i=m+1}^{n}\frac{1}{p-p_i}, \qquad (1.136)$$

където s_i, $i=1\div m\le n$ са нулите на системата (корените на числителя на предавателната й функция), а p_i, $i=1\div n$ са полюсите на системата (корените на знаменателя на предавателната й функция).

Нека изразът в първото произведение на (1.136) се представи във вида:

$$\frac{p-s_i}{p-p_i}=1+\frac{p_i-s_i}{p-p_i}, \qquad (1.137)$$

а предавателната функция (1.136) - във вида:

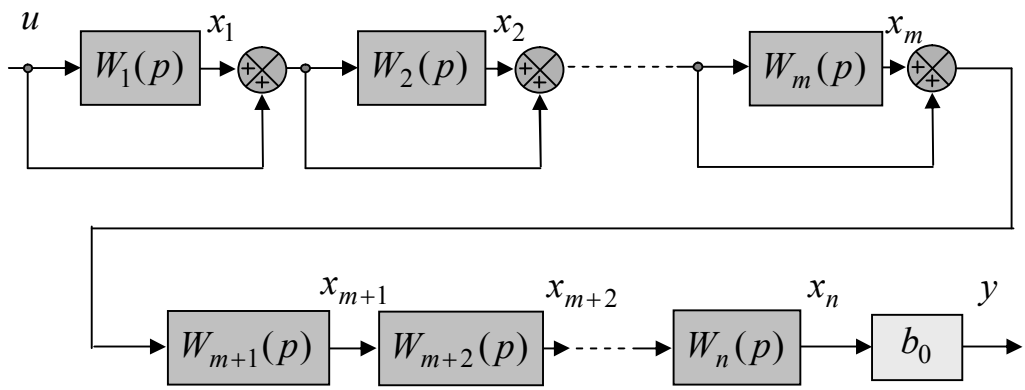
$$W(p)=b_0\prod_{i=1}^{m}\left(1+W_i(p)\right)\prod_{i=m+1}^{n}W_i(p), \qquad (1.138)$$

където:

$$W_i(p)=\frac{p_i-s_i}{p-p_i} \quad \text{за } i=1\div m, \qquad (1.139)$$

$$W_i(p)=\frac{1}{p-p_i} \quad \text{за } i=m+1\div n. \qquad (1.140)$$

Произведението на елементарните предавателни функции в (1.138) съответства на последователно свързване на звена, следователно системата може да се представи със структурната схема, показана на фиг. 1.18.



Фиг.1.18. Структурна схема на система, предавателната функция на която е разложена на прости множители

Нека изходите на блоковете с предавателни функции $W_i(p)$ от фигурата се изберат за променливи на състоянието на системата, както е показано на фиг. 1.18.

Тогава според структурната схема за променливата x_1 се получава:

$$W_1(p) = \frac{x_1(p)}{u(p)} = \frac{p_1 - s_1}{p - p_1},$$
$$px_1(p) - p_1 x_1(p) = (p_1 - s_1)u(p),$$

или във времевата област:

$$\dot{x}_1(t) = p_1 x_1(t) + (p_1 - s_1)u(t). \qquad (1.141)$$

За променливата x_2 от фиг. 1.18 следва:

$$W_2(p) = \frac{x_2(p)}{x_1(p) + u(p)} = \frac{p_2 - s_2}{p - p_2},$$
$$px_2(p) - p_2 x_2(p) = (p_2 - s_2)x_1(p) + (p_2 - s_2)u(p),$$

или във времевата област:

$$\dot{x}_2(t) = p_2 x_2(t) + (p_2 - s_2)x_1(t) + (p_2 - s_2)u(t). \qquad (1.142)$$

По аналогичен начин за променливата x_3 се получава:

$$W_3(p) = \frac{x_3(p)}{x_2(p) + x_1(p) + u(p)} = \frac{p_3 - s_3}{p - p_3},$$
$$px_3(p) - p_3 x_3(p) = (p_3 - s_3)x_1(p) + (p_3 - s_3)x_2(p) + (p_3 - s_3)u(p),$$

или във времевата област:

$$\dot{x}_3(t) = p_3 x_3(t) + (p_3 - s_3)x_1(t) + (p_3 - s_3)x_2(t) + (p_3 - s_3)u(t)\,. \quad (1.143)$$

Последната променлива, за която се прилага този алгоритъм, е x_m:

$$\begin{aligned}\dot{x}_m(t) = p_m x_m(t) + (p_m - s_m)x_1(t) + (p_m - s_m)x_2(t) + \cdots \\ + (p_m - s_m)x_{m-1}(t) + (p_m - s_m)u(t).\end{aligned} \quad (1.144)$$

Променливите $x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_n$ се получават като при по-простия случай на предавателна функция без нули:

$$\begin{aligned}&\dot{x}_{m+1}(t) = p_{m+1}x_{m+1}(t) + x_m(t),\\ &\dot{x}_{m+2}(t) = p_{m+2}x_{m+2}(t) + x_{m-1}(t),\\ &\vdots\\ &\dot{x}_{n-1}(t) = p_{n-1}x_{n-1}(t) + x_{n-2}(t),\\ &\dot{x}_n(t) = p_n x_n(t) + x_{n-1}(t).\end{aligned} \quad (1.145)$$

Изходът на системата е:

$$y = b_0 x_n(t)\,. \quad (1.146)$$

От (1.141) - (1.146) се извеждат матриците на системата от нейното представяне във формата (1.19), (1.20):

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} p_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ p_2 - s_2 & p_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ p_3 - s_3 & p_3 - s_3 & p_3 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & & & & \vdots \\ p_m - s_m & p_m - s_m & p_m - s_m & \cdots & p_m & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & p_{m+1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & p_{m+2} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & p_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & p_n \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}=\begin{bmatrix} p_1-s_1 \\ p_2-s_2 \\ p_3-s_3 \\ \vdots \\ p_m-s_m \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & b_0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{D}=\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}. \qquad (1.147)$$

Пример 1.17. Да се представи в пространството на състоянието във вида (1.147) система, която се описва с диференциалното уравнение:

$$y^{(5)}(t)+15y^{(4)}(t)+85\dddot{y}(t)+225\ddot{y}(t)+274\dot{y}(t)+120y(t)=$$
$$=\ddot{u}(t)+21\ddot{u}(t)+146\dot{u}(t)+336u(t).$$

Решение. Редът на системата е $n=5$. Предавателната й функция е:

$$W(p)=\frac{p^3+21p^2+146p+336}{p^5+15p^4+85p^3+225p^2+274p+120}.$$

Нулите на системата са корените на уравнението:

$$p^3+21p^2+146p+336=0$$

и са:

$$s_1=-6,\ s_2=-7,\ s_3=-8.$$

Полюсите на системата са корените на уравнението:

$$p^5+15p^4+85p^3+225p^2+274p+120=0$$

и са:

$$p_1=-1,\ p_2=-2,\ p_3=-3,\ p_2=-4,\ p_3=-5.$$

Разложението на предавателната функция на системата на прости във вида (1.136) е:

$$W(p)=\frac{y(p)}{u(p)}=b_0\prod_{i=1}^{3}\frac{p-s_i}{p-p_i}\prod_{i=4}^{5}\frac{1}{p-p_i}=$$
$$=\frac{(p+6)(p+7)(p+8)}{(p+1)(p+2)(p+3)}.\frac{1}{(p+4)(p+5)},$$

където коефициентът $b_0=1$.

Матриците на системата от нейното описание в пространството на състоянието, получені според (1.147) са:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 5 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}.$$