1.4.2.1. НКФ за системи с прости реални корени на характеристичното уравнение

Представянето на системи в пространството на състоянието в НКФ се извършва от предавателната функция на системата, като аналогично на ФККФ се приема, че числителят и знаменателят ѝ са от n-ти ред, както и че коефициентът $a_0 = 0$:

$$W(p) = \frac{y(p)}{u(p)} = \frac{b_0 p^n + b_1 p^{n-1} + \ldots + b_{n-1} p + b_n}{p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_{n-1} p + a_n}. \qquad (1.107)$$

Характеристичното уравнение на система, представена с предавателната функция (1.107), е:

$$p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_{n-1} p + a_n = 0. \qquad (1.108)$$

В най-простия случай, който е предмет на разглеждане в тази точка, всички корени на характеристичното уравнение $p_i,\ i = 1 \div n$ са реални числа и между тях няма кратни корени, т.е. $p_1 \neq p_2 \neq p_3 \neq \cdots \neq p_n$. Ако тези условия са изпълнени за дадена система, то предавателната ѝ функция може да се представи във вида:

$$W(p) = c_0 + \sum_{i=1}^{n} \frac{c_i}{p - p_i}. \qquad (1.109)$$

Коефициентите $c_i, i = 0 \div n$ в разложения вариант (1.109) на предавателната функция на системата (1.107) се изчисляват от изразите:

$$\begin{aligned} c_0 &= \lim_{p \to \infty} W(p), \\ c_i &= \lim_{p \to p_i} (p - p_i) W(p), \ \ i = 1 \div n. \end{aligned} \qquad (1.110)$$

Изборът на променливите на състоянието се извършва, като се направи полагането:

$$x_i(p) = \frac{1}{p - p_i} u(p). \qquad (1.111)$$

Тъй като изразът (1.111) е не във времевата, а в операторната област, върху него се прилага обратното преобразуване на Лаплас, за да се получат променливите на състоянието във времевата област. Преди това (1.111) се преобразува във вида:

$$
\begin{aligned}
&(p-p_i)x_i(p)=u(p)\rightarrow\\
&px_i(p)-p_ix_i(p)=u(p)\rightarrow\\
&px_i(p)=p_ix_i(p)+u(p).
\end{aligned}
$$

Обратното преобразуване на Лаплас за така преобразуваното уравнение (1.111) води до:

$$
\dot{x}_i(t)=p_ix_i(t)+u(t). \qquad (1.112)
$$

Разширеният запис на (1.112) е:

$$
\begin{aligned}
&\dot{x}_1(t)=p_1x_1(t)+u(t),\\
&\dot{x}_2(t)=p_2x_2(t)+u(t),\\
&\vdots\\
&\dot{x}_{n-1}(t)=p_{n-1}x_{n-1}(t)+u(t),\\
&\dot{x}_n(t)=p_nx_n(t)+u(t).
\end{aligned} \qquad (1.113)
$$

Уравнението за изхода на системата може да се изведе от (1.107):

$$
\begin{aligned}
&W(p)=\frac{y(p)}{u(p)}=c_0+\sum_{i=1}^{n}\frac{c_i}{p-p_i}\rightarrow\\
&y(p)=\left[c_0+\sum_{i=1}^{n}\frac{c_i}{p-p_i}\right]u(p),
\end{aligned}
$$

или с отчитане на (1.111):

$$
y(p)=c_0u(p)+\sum_{i=1}^{n}c_ix_i(p). \qquad (1.114)
$$

Обратното преобразуване на Лаплас на (1.114) е:

$$
y(t)=c_0u(t)+\sum_{i=1}^{n}c_ix_i(t)=c_1x_1(t)+c_2x_2(t)+\cdots+c_nx_n(t)+c_0u(t). \qquad (1.115)
$$

Записът на уравнения (1.113) и (1.115) в матрична форма е:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1}(t) \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & p_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & p_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t),$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & \cdots & c_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_0 \end{bmatrix} u(t).$$

или в компактна форма това отново са уравнения (1.19) и (1.20):

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t),$$
$$y(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}u(t).$$

Матриците **A**, **B**, **C** и **D** на системата в НКФ за случая на прости реални корени на характеристичното уравнение, са:

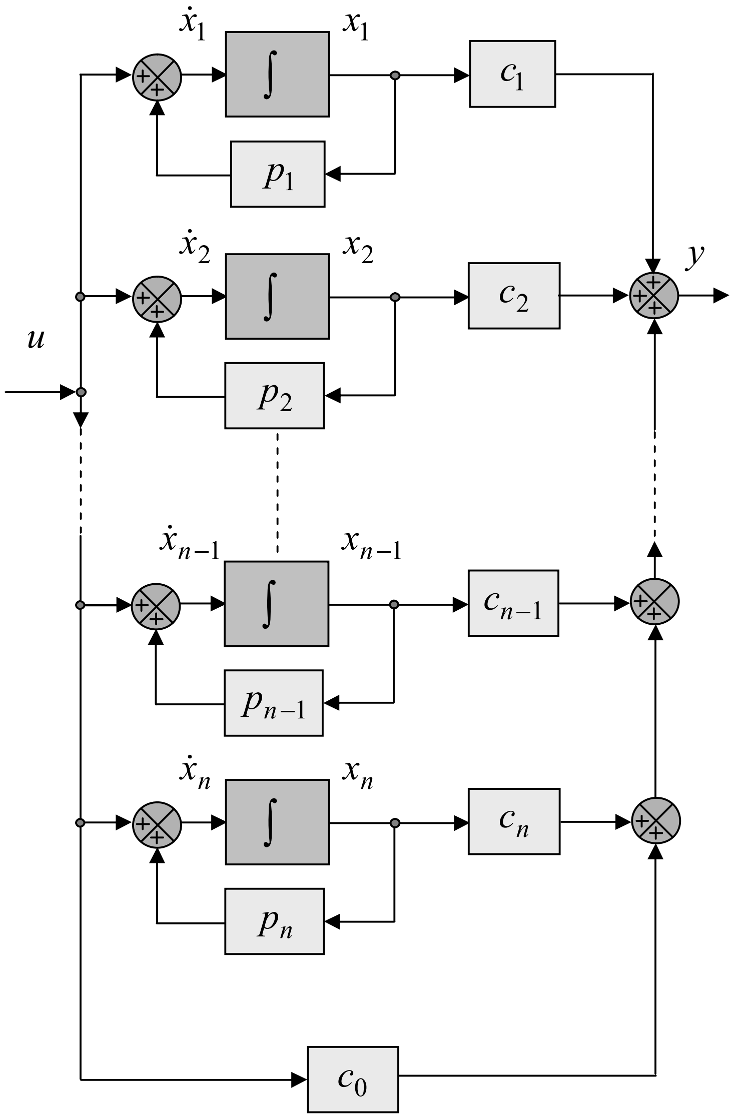
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} p_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & p_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & p_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$
$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & \cdots & c_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} c_0 \end{bmatrix}. \tag{1.116}$$

Следователно могат да се дефинират следните правила за съставяне на матриците **A**, **B**, **C** и **D** в тази канонична форма:

- матрицата **A** е диагонална матрица, като елементите по главния диагонал са корените на характеристичното уравнение на системата ;
- всички елементи на вектора **B** са единици;
- елементите на вектора **C** и на скалара **D** се изчисляват по формули (1.110) или по известния от елементарната математика метод на неопределените коефициенти.

Поради вида на матрицата **A** нормалната канонична форма за случая на прости корени на характеристичното уравнение на системата е известна още като *диагонална канонична форма*. Фактът, че в НКФ матрицата на състоянието **A** е диагонална матрица е едно от основните предимства на тази канонична форма, защото с такъв тип матрица на състоянието значително се облекчават някои изчисления при основни задачи, решавани от съвременната теория на управлението. Друго предимство на нормалната канонична форма е, че при нея в представянето на системата в пространството на състоянието в явен вид фигурират корените на характеристичното уравнение или полюсите на системата. Полюсите на системата определят най-важната за работоспособността на една система характеристика, а именно устойчивостта й, така че НКФ дава нагледна представа за устойчивостта на системата.

На фиг. 1.15 е представена блоковата схема на нормалната канонична форма.



Фиг.1.15. Блокова схема на НКФ за случая на прости корени на характеристичното уравнение на системата

Пример 1.13. Да се намерят матриците в пространството на състоянието в НКФ на система, която се описва с диференциалното уравнение:

$$\ddot{y}(t) + 12\dot{y}(t) + 20y(t) = 2u(t).$$

Решение. Редът на системата е $n = 2$. Предавателната функция на системата е:

$$W(p) = \frac{y(p)}{u(p)} = \frac{2}{p^2 + 12p + 20}.$$

Характеристичното уравнение е:

$$p^2 + 12p + 20 = 0.$$

Корените на характеристичното уравнение са:

$$p_1 = -2,\ p_2 = -10.$$

Тъй като корените са реални числа и няма кратни корени, то за системата може да бъде приложен базовият вариант на нормалната канонична форма.

Уравнения (1.113) и (1.115) за системата са:

$$\dot{x}_1(t) = p_1 x_1(t) + u(t),$$

$$\dot{x}_2(t) = p_2 x_2(t) + u(t),$$

$$y(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) + c_0 u(t).$$

Матриците **A** и **B** според (1.116) са:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -10 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Коефициентите $c_i,\ i = 0 \div n$ на матриците **C** и **D** се изчисляват по формули (1.110).

Коефициентът c_0 е:

$$c_0 = \lim_{p\to\infty} W(p) = \lim_{p\to\infty} \frac{2}{p^2 + 12p + 20} = 0.$$

За конкретната задача този коефициент може и да не се изчислява по формулата, тъй като редът на числителя на предавателната функция е по-малък от реда на знаменателя. При такива системи винаги матрицата на обхода **D** е нулева матрица.

За изчисляването на коефициентите $c_i,\ i = 1 \div n$ е по-удобно знаменателят на предавателната функция на системата да се представи в разложен на прости множители (от първи ред) вид. Знаейки корените на знаменателя, за настоящата задача за предавателната функция следва:

$$W(p) = \frac{2}{p^2 + 12p + 20} = \frac{2}{(p+2)(p+10)}.$$

Коефициентите c_1 и c_2 са:

$$c_1 = \lim_{p\to -2} (p+2)W(p) = \lim_{p\to -2} \frac{(p+2)2}{(p+2)(p+10)} = \lim_{p\to -2} \frac{2}{(p+10)} = \frac{2}{8} = 0.25,$$

$$c_2 = \lim_{p\to -10}(p+10)W(p) = \lim_{p\to -10}\frac{(p+10)2}{(p+2)(p+10)} = \lim_{p\to -10}\frac{2}{(p+2)} = -\frac{2}{8} = -0.25$$

Следователно матриците **C** и **D** на системата са:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0.25 & -0.25 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}.$$

Пример 1.14. Да се намерят матриците в пространството на състоянието в НКФ на система, която се описва с диференциалното уравнение:

$$\dddot{y}(t) + 16\ddot{y}(t) + 71\dot{y}(t) + 56y(t) = \dot{u}(t) + 3u(t).$$

Решение. Редът на системата е $n = 3$. Предавателната й функция е:

$$W(p) = \frac{y(p)}{u(p)} = \frac{p+3}{p^3 + 16p^2 + 71p + 56}.$$

Характеристичното уравнение на системата е:

$$p^3 + 16p^2 + 71p + 56 = 0$$

и има корени:

$$p_1 = -1,\ p_2 = -7,\ p_3 = -8.$$

Корените отново са реални числа и между тях няма кратни корени.

Уравненията на системата в НКФ са:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1(t) &= p_1 x_1(t) + u(t),\\
\dot{x}_2(t) &= p_2 x_2(t) + u(t),\\
\dot{x}_3(t) &= p_3 x_3(t) + u(t)\\
y(t) &= c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) + c_3 x_3(t) + c_0 u(t).
\end{aligned}$$

Матриците **A** и **B** са:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Коефициентите $c_i,\ i = 0 \div n$ на матриците **C** и **D** се изчисляват по формули (1.110).

Коефициентът c_0 отново е равен на нула, тъй като числителят на предавателната функция на системата е от по-нисък ред от знаменателя й.

Преобразуваният вид на предавателната функция е:

$$W(p) = \frac{y(p)}{u(p)} = \frac{p+3}{p^3 + 16p^2 + 71p + 56} = \frac{p+3}{(p+1)(p+7)(p+8)}.$$

Коефициентите c_i са:

$$c_1 = \lim_{p\to -1}(p+1)W(p) = \lim_{p\to -1}\frac{(p+1)(p+3)}{(p+1)(p+7)(p+8)} = \lim_{p\to -1}\frac{p+3}{(p+7)(p+8)} = \frac{1}{21},$$

$$c_2 = \lim_{p\to -7}(p+7)W(p) = \lim_{p\to -7}\frac{(p+7)(p+3)}{(p+1)(p+7)(p+8)} = \lim_{p\to -7}\frac{p+3}{(p+1)(p+8)} = \frac{2}{3},$$

$$c_3 = \lim_{p\to -8}(p+8)W(p) = \lim_{p\to -8}\frac{(p+8)(p+3)}{(p+1)(p+7)(p+8)} = \lim_{p\to -8}\frac{p+3}{(p+1)(p+7)} = -\frac{5}{7}.$$

Следователно матриците **C** и **D** на системата са:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \frac{1}{21} & \frac{2}{3} & -\frac{5}{7} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{D} = [0].$$