1.4.1.2. ФККФ за системи, описвани с диференциално уравнение с производни в дясната част - вариант А

В общия случай една линейна стационарна система с един вход и един изход се описва с диференциалното уравнение:

$$\begin{aligned} & y^{(n)}(t)+a_1 y^{(n-1)}(t)+\ldots+a_{n-2}\ddot{y}(t)+a_{n-1}\dot{y}(t)+a_n y(t)= \\ & \quad =b_0 u^{(n)}(t)+b_1 u^{(n-1)}(t)+\ldots+b_{n-2}\ddot{u}(t)+b_{n-1}\dot{u}(t)+b_n u(t). \end{aligned} \tag{1.89}$$

Приема се, че редът на дясната част диференциалното уравнение съвпада с реда на лявата част и е равен на n. Ако моделът на дадена система е от този вид, то не може да се приложи стратегията от т.1.4.1.1, при която изходният сигнал $y(t)$ и неговите производни $\dot{y}(t),\ \ddot{y}(t),\cdots,y^{(n-1)}(t)$ се избират за променливи на състоянието.

Ако се приложи алгоритъмът от предходната точка, биха се получили изразите:

$$\begin{aligned} & \dot{x}_1(t)=x_2(t), \\ & \dot{x}_2(t)=x_3(t), \\ & \vdots \\ & \dot{x}_n(t)=-a_n x_1(t)-a_{n-1}x_2(t)\ldots-a_2 x_{n-1}(t)-a_1 x_n(t)+ \\ & \qquad +b_0 u^{(n)}(t)+b_1 u^{(n-1)}(t)+\ldots+b_{n-2}\ddot{u}(t)+b_{n-1}\dot{u}(t)+b_n u(t) \end{aligned}$$

В този случай, ако отново се избере $y(t)=x_1(t)$ системата няма да има еднозначно решение. За да се получи такова в десните части на горните уравнения на състоянието на трябва да фигурират производни на входния сигнал.

Нека променливите на състоянието се изберат по схемата:

$$\begin{aligned} & x_1(t)=y(t)-\beta_0 u(t), \\ & x_2(t)=\dot{y}(t)-\beta_0\dot{u}(t)-\beta_1 u(t), \\ & x_3(t)=\ddot{y}(t)-\beta_0\ddot{u}(t)-\beta_1\dot{u}(t)-\beta_2 u(t), \\ & \vdots \\ & x_n(t)=y^{(n-1)}(t)-\beta_0 u^{(n-1)}(t)-\beta_1 u^{(n-2)}(t)\cdots-\beta_{n-2}\dot{u}(t)-\beta_{n-1}u(t). \end{aligned} \tag{1.90}$$

Уравненията (1.90) могат да се опростят, като се отчете, че $\dot{y}(t)-\beta_0\dot{u}(t)=\dot{x}_1(t)$, $\ddot{y}(t)-\beta_0\ddot{u}(t)-\beta_1\dot{u}(t)=\ddot{x}_1(t)$ и т.н.:

$$
\begin{aligned}
&x_1(t) = y(t) - \beta_0 u(t),\\
&x_2(t) = \dot{x}_1(t) - \beta_1 u(t),\\
&x_3(t) = \dot{x}_2(t) - \beta_2 u(t),\\
&\vdots\\
&x_n(t) = \dot{x}_{n-1}(t) - \beta_{n-1} u(t).
\end{aligned}
\tag{1.91}
$$

Оттук за първите производни на променливите на състоянието следва:

$$
\begin{aligned}
&\dot{x}_1(t) = x_2(t) + \beta_1 u(t),\\
&\dot{x}_2(t) = x_3(t) + \beta_2 u(t),\\
&\vdots\\
&\dot{x}_{n-1}(t) = x_n(t) + \beta_{n-1} u(t),\\
&\dot{x}_n(t) = -a_n x_1(t) - a_{n-1} x_2(t) \ldots - a_2 x_{n-1}(t) - a_1 x_n(t) + \beta_n u(t),
\end{aligned}
\tag{1.92}
$$

а изразът за изходният сигнал е:

$$
y(t) = x_1(t) + \beta_0 u(t)\,. \tag{1.93}
$$

Коефициентите β_i зависят от коефициентите a_i на лявата и b_i на дясната част на диференциалното уравнение на системата и се изчисляват по формулите:

$$
\begin{aligned}
&\beta_0 = b_0,\\
&\beta_1 = b_1 - a_1\beta_0,\\
&\beta_2 = b_2 - a_1\beta_1 - a_2\beta_0,\\
&\beta_3 = b_3 - a_1\beta_{21} - a_2\beta_1 - a_3\beta_0,\\
&\vdots
\end{aligned}
\tag{1.94}
$$

На базата на тези уравнения може да се изведе следната обобщена зависимост за пресмятане на коефициентите β_i:

$$
\begin{aligned}
&\beta_0 = b_0,\\
&\beta_i = b_i - \sum_{k=1}^{i} a_k \beta_{i-k}\,,\; i = 1 \div n.
\end{aligned}
\tag{1.95}
$$

Записът на уравнения (1.92) и (1.93) в разгърната матрична форма е:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1}(t) \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} \\ \beta_n \end{bmatrix} u(t),$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_0 \end{bmatrix} u(t),$$

съответно в компактна матрична форма записът е:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t),$$
$$y(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}u(t),$$

където:

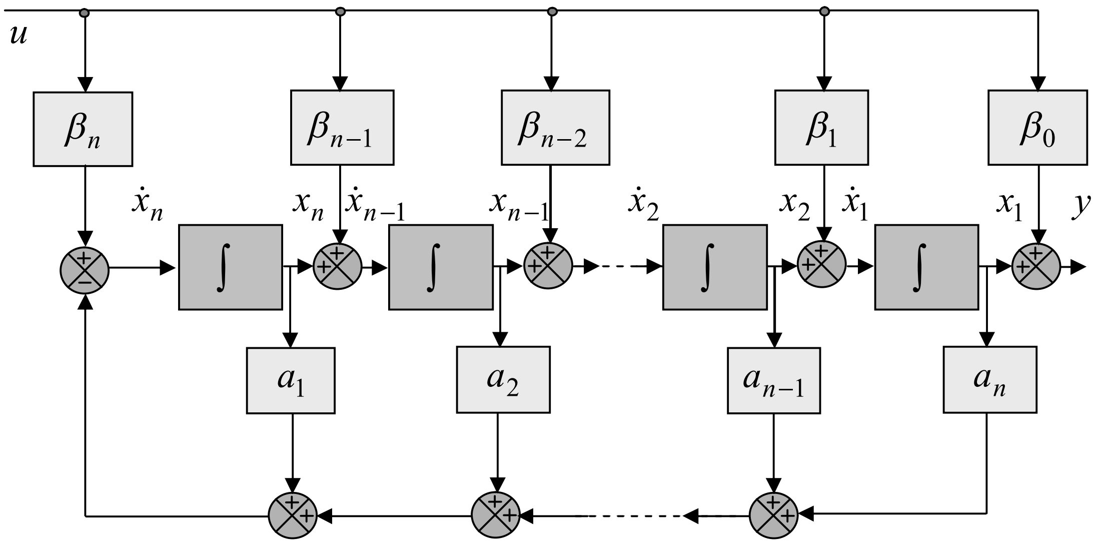
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} \\ \beta_n \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} \beta_0 \end{bmatrix}. \tag{1.96}$$

Правилата за конструиране на матриците **A**, **B**, **C** и **D** на система от произволен ред във ФККФ по "шаблонните" матрици (1.96) са аналогични на тези от т.1.4.1.1 с изключение на вектора-стълб **B** и скалара **D**, които съдържат коефициентите β_i.

Системи, в чиито модел няма производни на входния сигнал, са частен случай на разглежданите в тази точка системи с производни на входния сигнал, следователно за тях също може да бъде приложена настоящата ФККФ (1.96).

На фиг. 1.12 е представена интерпретацията на уравненията (1.92) и (1.93) в блоков вид.



Фиг.1.12. Блокова схема на ФККФ за системи, представяни с диференциални уравнения с производни на входния сигнал - вариант А

Пример 1.9. Да се намерят матриците в пространството на състоянието на система, която се описва с диференциалното уравнение:

$$\ddot{y}(t) + 4\dot{y}(t) + 7y(t) = 2\ddot{u}(t) + \dot{u}(t) + 3u(t).$$

Решение. Системата е от втори ред, коефициентите a_i и b_j са:

$$a_0 = 1, a_1 = 4, a_2 = 7, b_0 = 2, b_1 = 1, b_2 = 3\,.$$

Уравнения (1.92) и (1.93) за система от втори ред са:

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t) + \beta_1 u(t),$$

$$\dot{x}_2(t) = -a_2 x_1(t) - a_1 x_2(t) + \beta_2 u(t),$$

$$y(t) = x_1(t) + \beta_0 u(t)\,.$$

Коефициентите β_i са:

$$\beta_0 = b_0 = 2,$$

$$\beta_1 = b_1 - a_1\beta_0 = 1 - 4.2 = -7,$$

$$\beta_2 = b_2 - a_1\beta_1 - a_2\beta_0 = 3 - 4.(-7) - 7.2 = 17.$$

Следователно матриците **A**, **B**, **C** и **D** на системата във ФККФ са:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -7 & -4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -7 \\ 17 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix}.$$

Пример 1.10. Да се намерят матриците в пространството на състоянието на система, която се описва с диференциалното уравнение:

$$2\dddot{y}(t) + 2\ddot{y}(t) + 4\dot{y}(t) + 4y(t) = \ddot{u}(t) + 2u(t).$$

Решение. Тъй като коефициентът $a_0 \neq 0$ първоначално трябва да извърши нормализация на уравнението:

$$\dddot{y}(t) + \ddot{y}(t) + 2\dot{y}(t) + 2y(t) = 0.5\ddot{u}(t) + u(t).$$

Системата е от трети ред, коефициентите a_i и b_j са:

$$a_0 = 1,\ a_1 = 1,\ a_2 = 2,\ a_3 = 2,\ b_0 = 0,\ b_1 = 0.5,\ b_2 = 0,\ b_3 = 1.$$

В случая е важно да се съобрази, че тъй като при тази канонична форма се приема, че дясната част на диференциалното уравнение е от същия ред като лявата, то коефициентът $b_0 = 0$, защото в конкретния модел липсва трета производна на входния сигнал. Най-общо индексите на коефициентите b_j, които се намират пред съответните производни на $u(t)$, са същите като индексите на коефициентите a_i, които се намират пред аналогичните производни на $y(t)$. Например ако коефициентът пред $\dot{y}(t)$ е a_1, то задължително b_1 трябва да е коефициентът пред $\dot{u}(t)$.

Уравнения (1.92) и (1.93) за система от трети ред са:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1(t) &= x_2(t) + \beta_1 u(t),\\
\dot{x}_2(t) &= x_2(t) + \beta_2 u(t),\\
\dot{x}_3(t) &= -a_3 x_1(t) - a_2 x_2(t) - a_1 x_3(t) + \beta_3 u(t),
\end{aligned}$$

$$y(t) = x_1(t) + \beta_0 u(t).$$

Коефициентите β_i са:

$$\begin{aligned}
\beta_0 &= b_0 = 0,\\
\beta_1 &= b_1 - a_1\beta_0 = 0.5,\\
\beta_2 &= b_2 - a_1\beta_1 - a_2\beta_0 = -0.5,\\
\beta_3 &= b_3 - a_1\beta_2 - a_2\beta_1 - a_3\beta_0 = 0.5.
\end{aligned}$$

Матриците **A**, **B**, **C** и **D** на системата във ФККФ са:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ -0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}.$$